2016/12/2

الموضوع: [14]

تعميم:

ليكن A جبرا و ليكن A' جبرا لي فوق الحلقة R

و $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي عندئذ:

[1] اذا كان I, J مثاليين في A عندئذ:

$$f([I,J]) = [f(I), f(J)]$$

[2] لأجل كل $n \in N^*$ فإن $C^n f(A) = f(C^n A)$

البرهان:

1- ليكن $x \in f([I,J])$

عندئذ: $x = f(y)$ و $y \in [I,J]$ حيث $y = [a,b]$

$a \in I, b \in J$

$$x = f(y) = f([a,b]) = [f(a), f(b)] \subseteq [f(I), f(J)]$$

ومنه

$$f([I,J]) \subseteq [f(I), f(J)]$$

بطريقة مشابهة نحصل على الاحتواء المعاكس.

2- $n=1$; $Cf(A) = f(A) = f(CA)$

$n=2$; $C^2 f(A) = [f(A), Cf(A)] = [f(A), f(CA)]$

$$= f([A, CA]) = f(C^2 A)$$

لنفرض أن:

$$C^k f(A) = f(C^k A)$$

$$C^{k+1} f(A) = [f(A), C^k f(A)] = [f(A), f(C^k A)]$$

$$= f([A, C^k A]) = f(C^{k+1} A).$$

تعريف:

ليكن A جبر لي عديم القوى فوق الحلقة R عندئذ

1- أي مثالي R في A يكون عديم القوى.

الموضوع :

2- إذا كان I مثالي في A فإن جبر الخارج A/I عديم القوى.

البرهان:

1- لدينا سابقاً أن $\forall n \in N^*$ فإن $C^n I \subseteq C^n A$

ولدينا أن A عديم القوى فإنه يوجد

$C^n I \subseteq C^n A = 0$

ومنه المثالي I عديم القوى.

2- لنفرض أن $C^n A = 0$ لنأخذ تاكل قانوني عام

$\pi : A \longrightarrow A/I$

$\pi(a) = a + I \quad ; \quad \forall a \in A$

ومنه $C^m(A/I) = C^m(\pi(A))$

$= \pi(C^m A) = \pi(0) = I$

ومنه فإن A/I عديم القوى.

حول الجبر البسيط

تعريف: ليكن A جبر لي فوق R

نسمي أكبر مثالي في A قابل للحل بالأساس (جذر) الجبر A

ونرمز له $Rad(A)$ أو $J(A)$

- ونسمي الجبر A تبديلي إذا كان $[A, A] = 0$

- نقول عن المثالي I في A أنه تبديلي إذا كان $[I, I] = 0$

*تعريف:

نقول عن جبر لي A فوق R أنه جبر بسيط إذا كان كل مثالي $I \neq A$ تبديلي هو صفر «أو لا يحوي مثاليات تبديلية B بحيث $B \neq A$»

/ /

الموضوع: ....

تعريف:

كل جبر لي بسيط المعدوم ... نصف بسيط.

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R، الشروط الآتية متكافئة:

1- A نصف بسيط

2- A لا يحوي مثاليات قابلة للحل مغايرة للصفر

3- $J(A)=\{0\}$

البرهان:

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$

نفترض A نصف بسيط وليكن B مثالي قابل للحل في A

وليكن n أصغر عدد صحيح موجب من أجله $D^nB=0$

$$0=D^nB=[D^{n-1}B, D^{n-1}B]$$

وأن $D^{n-1}B\neq 0$ وهذا ابتدائي لكون A نصف بسيط أي أن

$B=0$

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$

ليكن $K \triangleleft A$ مثالي تبديلي في A، عندئذ:

$[K,K]=0 \Rightarrow D^1K=0$

وحسب الفرض فإن $K=0$

$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{3}$ واضح حسب التعريف

$\boxed{3} \Leftarrow \boxed{2}$ ليكن L مثالي قابل للحل في A

وحسب تعريف $J(A)$ فإن $L \subseteq J(A) \Leftarrow L=0$

*

مبرهنة:

ليكن A جبر لي ~~...~~ فوق الحلقة R عندئذ

فإن جبر الخارج $\frac{A}{J(A)}$ نصف بسيط.

الموضوع: .... / /

البرهان:

لتكن $\frac{K}{J(A)}$ مثالياً في $\frac{A}{JA}$ قابل للحل حيث

K مثالي في A يحوي $J(A)$

ومنه فإن المثالي K قابل للحل في A.

$J(A) \subseteq K \subseteq JA$

ومنه $K = J(A)$

ومنه فإن $\frac{K}{J(A)} = \frac{J(A)}{J(A)} = 0$

اي ان الجبر $\frac{A}{J(A)}$ نصف بسيط.

* تمهيدية:

لتكن A جبر لي فوق حلقة A و B مثالي قابل للحل في A

إذا كان A/B جبر الخارج نصف بسيط عندئذ

$B = J(A)$

البرهان:

لنفرض أن B مثالي في A قابل للحل ومنه فإن $B+J(A)$ مثالي قابل للحل في A وبما أن $B \subseteq B+J(A)$

فإن $\frac{B+J(A)}{B}$ جبر خارج معرف. وهو أيضاً قابل للحل.

وأن $\frac{B+J(A)}{B}$ مثالي في A/B

وبما أن A/B نصف بسيط فرضاً فإن $\frac{B+J(A)}{B} = B = 0$

ومنه فإن $B + J(A) = B$ وبالتالي

$J(A) \subseteq B \subseteq J(A) \Leftarrow B = J(A)$

أكبر مثالي قابل للحل

قابل للحل

خاص

تمرين: ليكن $A \to A' : f$ تشاكل جبور لي فوق R و B مثالي قابل للحل في A، عندئذ فإن $f(B)$ مثالي قابل للحل في A'

الحل:

إن B مثالي في A وكون f تشاكل جبور لي فإن $f(B)$ مثالي في A'

بما أن B مودول جزئي في A وأن f تشاكل مودولات فإن $f(B)$ مودول جزئي في A'

ليكن $a \in A'$ ونبرهن على أن

$$d_a(f(B)) \subseteq f(B)$$

ليكن $y \in d_a f(B)$ عندئذ

$$y = d_a x \; ; \; x \in f(B)$$
$$\Rightarrow x = f(z) \; ; \; z \in B$$
$$y = d_a(x) = [a, z] = [a, f(z)]$$

وبما أن f شامل فإن $a = f(b)$، $b \in A$

وبالتالي

$$y = d_a(x) = [f(b), f(z)]$$
$$= f([b, z]) \in f(B)$$
$$\Rightarrow d_a f(B) \subseteq f(B)$$

ومنه $f(B)$ مثالي في A'

لنفرض أن B قابل للحل عندئذ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$D^n B = 0$$

$$0 = f(D^n B) = f([D^{n-1}B, D^{n-1}B])$$
$$= [f(D^{n-1}B), f(D^{n-1}B)]$$
$$= [D^{n-1} f(B), D^{n-1} f(B)]$$
$$= D^n f(B) = 0$$

$\Leftarrow$ $f(B)$ قابل للحل في A' فقط